Dans ce problème on désigne par $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ les coefficients du binôme. On pose $0! = 1$.

I 1° A partir de la formule, que l'on admettra :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360\,n^3} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, donner un développement limité du coefficient du binôme $\binom{2n}{n}$ c'est-à-dire trouver des constantes réelles a, b, c_0, c_1, c_2, c_3 et une fonction $\eta(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$, telles que :

$$\binom{2n}{n} = \frac{a^n}{n^b}\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \eta\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right).$$

2° Quel est le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

Calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$$

et préciser son rayon de convergence.

3° On pose $\omega(n) = \max_{0\leqslant p\leqslant n} \binom{n}{p}$. Montrer que $\omega(2n-1) = \frac{1}{2}\omega(2n)$.

Calculer la somme de la série entière : $\sum_{n=0}^{\infty} \omega(n)\, x^n$.

Quel est son rayon de convergence?

4° Montrer que, lorsque $n \to \infty$, la fonction $\omega(n)$ n'a pas de développement limité, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constantes réelles a, b, c_0, c_1, ni de fonction η avec $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$, telles que :

$$\omega(n) = \frac{a^n}{n^b}\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \eta\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\right).$$

II Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_h\}$ une famille de parties de E. On dit qu'une telle famille possède la propriété S si pour tout couple (i, j), $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $i \neq j$, la relation $A_i \subset A_j$ n'est jamais vérifiée.

1° Soit k un entier fixé, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Montrer que la famille des parties de E à k éléments possède la propriété S.

2° Lorsque $h = 2$, combien y a-t-il de familles $\{A_1, A_2\}$ qui possèdent la propriété S? (On considérera les familles $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_2, A_1\}$ comme distinctes.)

3° On appelle chaîne de E, une famille de parties de E : $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ vérifiant pour tout i, Card $C_i = i$ et $C_i \subset C_{i+1}$. Combien y a-t-il de chaînes dans E? Montrer que, si une famille $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_h\}$ de parties de E possède la propriété S, pour toute chaîne $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ on a : Card $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \leqslant 1$.

4° Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_h\}$ une famille de parties de E possédant la propriété S. Soit $\Gamma_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des chaînes $\mathcal{C}$ de E telles que :

$$\text{Card}\,(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) = 1$$

On définit l'application φ de $\Gamma_{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}$ de la façon suivante : pour toute chaîne $\mathcal{C} \in \Gamma_{\mathcal{A}}$, $\varphi(\mathcal{C})$ est le seul élément commun à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{C}$.

Montrer que φ est surjective et calculer en fonction de Card A, le cardinal de $\varphi^{-1}(\{A\})$, c'est-à-dire le nombre de chaînes dont l'image par φ est A.

5° Montrer que : $\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{\binom{n}{\text{Card } A_i}} \leqslant 1$

et en déduire que $h \leqslant \omega(n)$, où $\omega(n)$ a été défini en I, 3°.

Existe-t-il une famille $\{A_1, A_2, \ldots, A_{\omega(n)}\}$ de parties de E possédant la propriété S?

III 1° Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels strictement positifs, pas forcément distincts. On pose $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ et l'on désigne par $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit l'application f, de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathbf{R}$, par :

$$f(A) = \sum_{i\in A} a_i\,; \quad f(\varnothing) = 0.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, le nombre $g(t)$ de parties A de E telles que $f(A) = t$ est inférieur ou égal à $\omega(n)$.

2° Un joueur joue, à pile ou face, n parties consécutives avec une pièce non truquée. Lorsque c'est « pile » à la première partie, il gagne 1 franc. Lorsque c'est pile à la i^{eme} partie, il gagne i francs.

Donner une représentation probabiliste de ce jeu. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type du gain de ce joueur.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, donner une minoration pour la quantité : $\max_{t\in\mathbf{R}} g(t)$,

où $g(t)$ est la fonction définie en III, 1°, lorsque

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail